地球惑星物理学基礎演習 II　(第 1 回 2012/10/10)

授業について

- 各回 4 ～ 5 題程度の問題を出題するので, 次の回までにできるかぎり解いてくる。各問題ごとに, 答案を発表する人をふりあてる。あたった人は, 次回の授業中に自分の答案を黒板に板書し, 口頭で説明する。
- 10 分程度で解けるような, ごく簡単な小テストを毎回課す。その提出をもって出席点とする (口頭発表した人はそれをもって出席点とする)。
- 成績は期末試験 (1 月 16 日に実施) と出席点とによる。
- 電磁気学関係を桜庭中 (sakuraba@eps.s.u-tokyo.ac.jp) が, 物理数学関係を田中祐希 (yuki.tanaka@eps.s.u-tokyo.ac.jp) が, 隔週に担当する。

表記について

- 直交座標を (x, y, z), 円筒座標を (s, ϕ, z), 極座標を (r, θ, ϕ) であらわす。ただし円筒の軸, 極軸が z 軸で, ϕ は方位角 *azimuth* (または経度 *longitude*), θ は余緯度 *colatitude* である。
- ベクトル[1]は太字で $\boldsymbol{A}$ などと書く。成分表示するときは, たとえば直交座標系では (A_x, A_y, A_z) などと書く。座標系の単位ベクトルは $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ などとあらわす。位置ベクトルは $\boldsymbol{r}\ (= x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = r\boldsymbol{e}_r)$ と表記する。
- 曲線 C に沿ったスカラー[2]関数の線積分を $\int_C f\,\mathrm{d}\ell$ と書く。$\mathrm{d}\ell$ は線素で, たとえば x 軸に沿った線積分ならば $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$ である。ベクトル関数の線積分の定義は $\int_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_C (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_t)\,\mathrm{d}\ell$ である。ここで $\boldsymbol{e}_t$ は C の接線方向の単位ベクトル *unit tangent vector* である。とくに C が閉じた曲線ならば記号 $\oint_C$ をつかう。
- 曲面 S 上でのスカラー関数の面積分は $\int_S f\,\mathrm{d}S$ と書く。$\mathrm{d}S$ は面積素で, たとえば xy 平面上での面積分ならば $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 半径 c の球面積分ならば $\mathrm{d}S = c^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ である。ベクトル関数 の面積分の定義は $\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n)\,\mathrm{d}S$ である。$\boldsymbol{e}_n$ は S の法線方向の単位ベクトル *unit normal vector* である (その方向はその都度明示する)。とくに S が閉じた曲面ならば記号 $\oint_S$ をつかう。
- 空間内の領域 V における体積積分を $\int_V f\,\mathrm{d}V$ と表記する。$\mathrm{d}V$ は体積素で, 直交座標系では $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 極座標では $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ である。
- とくにことわりがなければ, 関数はいたるところじゅうぶん滑らかであるとする。

[1]英語では *vector* でヴェクターのように発音する。
[2]英語では *scalar* でスケイラーのように発音する。

o.k 10/10

問題 1　(ベクトル 3 重積)

(a) 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ および外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の幾何学的意味を簡潔に述べよ。

(b) ベクトル公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

が成り立つことを, (i) 直交座標系での内積と外積の成分表示

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z, \end{cases} \tag{2}$$

もしくは和の記号をつかったより簡便な表記法[3]

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i, \quad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_j\right)B_k, \tag{3}$$

をもちいて, (ii) 内積と外積の幾何学的な意味に基づいて成分計算なしで, 2 通りに確かめよ。ただし式 (3) では直交座標を (x_1, x_2, x_3) とあらわし, ベクトルの成分も (A_1, A_2, A_3) などと表記している。

※ レビ・チビタの記号 ε_{ijk} は, $(i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ のとき 1, $(i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)$ のとき -1, それ以外はゼロであるような反対称テンソルである ($\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ であり, 任意の 2 つの添字を交換すると符号が変わる)。

o.k. 10/10

問題 2　(ベクトル 3 重積)

ベクトル公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{4}$$

が成り立つことを, 問題 1 の式 (3) に見る記法と公式

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{5}$$

とをもちいて示せ (ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号で, $i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$, それ以外ではゼロ)。

[3]さらに和の記号を省略して, 2 回あらわれる添字については和をとる, という「アインシュタインの規約」をもちいるのがよい。