地球惑星物理学基礎演習II(物理数学)　No.1　2012/10/10 配布, 2012/10/17 実施

$e^{i\log i} = \cos\log i + i\sin\log i$

南原

$e^{i\log i}$

1. 以下の各問に答えよ。

   (a) 複素変数のべき関数 z^{α}(z も α も複素数) を、$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$ と定義する。i^i を計算せよ。

   (b) 単位円板上 $|z| \leq 1$ で、関数 $|\sin z|$ の最大値はどこにあって、どんな値を取るか。

   (c) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

   $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 3\cos t - \sin t$$

   実変数 x を複素変数 z に、右辺を $(3+i)e^{it}$ に置き換えて特解を求めてみること。

2. 次の各問に答えよ。

   (a) 数列 $z_n = \dfrac{1}{n}e^{i\frac{n\pi}{4}}$ を複素平面上の点列として図示し、その収束、発散を判定せよ。

   (b) 関数 $\dfrac{z}{z^*}$ の $z \to 0$ における極限を調べよ。ただし z^* は z の共役複素数を表す。

   (c) 関数

   $$f(z) = \begin{cases} (z+z^*)/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

   の $z = 0$ における連続性を調べよ。

3. 自転する地球上の観測者から見た流体の運動を考える。x 軸を東向き、y 軸を北向き、z 軸を鉛直上向きにとり、流体粒子の速度の (x, y, z) 成分をそれぞれ (u, v, w) とする。

   (a) 鉛直速度 w が小さくて無視できるとする。このとき、流体粒子の運動方程式の x, y 成分が次のように書けることを示せ。

   $$m\left(\frac{du}{dt} - fv\right) = F_x \qquad (1)$$

   $$m\left(\frac{dv}{dt} + fu\right) = F_y \qquad (2)$$

   ただし、m は流体粒子の質量、(F_x, F_y) は流体粒子に働く外力の (x, y) 成分である。$f = 2\Omega\sin\phi$ はコリオリパラーメータと呼ばれ、Ω は地球の自転角速度、ϕ は緯度を表す。

   (b) $F_x = F_y = 0$ のとき、(u, v) についての上の連立微分方程式を解いて流体粒子の運動を説明せよ。(ヒント：(1) $+ i \times$ (2) を計算し、$V = u + iv$ と置く。)